Zum Satz von Siu in der nichtarchimedischen Funktionentheorie

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Antonia Hanning
aus Bochum

Bochum 1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544708_0036

Zum Satz von Siu in der nichtarchimedischen Funktionentheorie

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Antonia Hanning
aus Bochum

Bochum 1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
§ 1 Vorbereitungen	4
§ 2 Der quasi-kompakte Fall	10
§ 3 Globalisierung	21
Literaturverzeichnis	37

EINLEITUNG

In seiner Arbeit [13] bewies Siu 1976 folgenden Satz:

Sei X ein komplexer Raum, A ein abgeschlossener Unterraum von X. Ist A Steinsch, so gibt es einen offenen Unterraum U von X, der A enthält und Steinsch ist.

In der vorliegenden Arbeit wird die nichtarchimedische Version des Satzes bewiesen für den Fall, daß X ein regulärer holomorpher Raum über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k ist. (Die algebraische Abgeschlossenheit des Grundkörpers k wird in dieser Arbeit auch im übrigen stets vorausgesetzt.) Mit einigem technischen Aufwand dürfte sich das Ergebnis auf den Fall "X glatt, k beliebig" übertragen lassen, vgl. [4], Satz 3.A.5.
Der Beweis ist von wesentlich anderer Natur, denn für die von Siu verwendeten "reellen" Methoden der komplexen Funktionentheorie gibt es im Nichtarchimedischen keine Entsprechung.
Wie bei Siu gliedert sich der Beweis in zwei Schritte: zunächst wird in §2 der "kompakte" Fall gelöst, dann folgt in §3 die Globalisierung.
In §1 wird u.a. der Begriff des holomorphen Raumes über einem nichtarchimedisch bewerteten Körper eingeführt, vgl. dazu insbesondere [11] und [6].

Ich danke Herrn Prof. Dr. W. Bartenwerfer für die Anregung zu dieser Arbeit und für das Interesse, mit dem er ihre Entstehung verfolgte.

§ 1 Vorbereitungen

Sei also k ein nichtarchimedisch vollständig bewerteter algebraisch abgeschlossener Körper mit einer nichttrivialen Bewertung $|_|$, E sein Bewertungsring.

T_n sei die "freie" affinoide Algebra der strikt konvergenten Potenzreihen in n Variablen über k,

$$T_n = k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$$
$$= \{ f \in k[[X_1,\ldots,X_n]] \mid f = \sum_{\underline{i}\in \mathbb{N}^n} a_{\underline{i}} \underline{X}^{\underline{i}},\ \lim_{\underline{i}} |a_{\underline{i}}| = 0 \}.$$

Versehen mit der Norm $|\sum_{\underline{i}\in \mathbb{N}^n} a_{\underline{i}} \underline{X}^{\underline{i}}| = \max_{\underline{i}\in \mathbb{N}^n} |a_{\underline{i}}|$ ist T_n eine k-Banachalgebra.

Jedes Ideal a von T_n ist endlich erzeugt und abgeschlossen; die k-affinoiden Algebren, das sind Faktorringe $A = T_n/a$ freier affinoider Algebren nach Idealen, sind noethersche k-Banachalgebren.
k-Algebra-Homomorphismen zwischen affinoiden Algebren sind stetig.
Ist $\pi : T_n \twoheadrightarrow A$ ein Epimorphismus, so nennt man die Menge $\{f_1,\ldots,f_n\}$, $f_i = \pi(X_i)$, $i = 1,\ldots,n$, ein affinoides Erzeugendensystem von A.

Im folgenden sei A stets eine k-affinoide Algebra.
Sp A bezeichne die Menge der maximalen Ideale von A. Die Pseudonorm $|f| := \sup_{x\in \mathrm{Sp}\,A} |f(x)|$ heißt Spektralnorm auf A.
Ist A reduziert, so ist die Spektralnorm eine die Topologie von A beschreibende Norm [5], [7].

Seien $f_1,\ldots,f_n,g_1,\ldots,g_m \in A$; dann nennt man die Teilmenge $\{x \in \mathrm{Sp}\,A \mid |f_i(x)| \leq 1,\ i = 1,\ldots,n,\ |g_j(x)| \geq 1,\ j = 1,\ldots,m\}$ einen speziellen affinoiden Teilbereich von Sp A.
Die speziellen affinoiden Teilbereiche bilden die Basis einer Topologie auf Sp A. Diese Topologie ist feiner als die Zariski-Topologie auf Sp A.

Eine Teilmenge U von Sp A heißt **affinoider Teilbereich** von Sp A, wenn es einen Homomorphismus $j : A \to B$ in eine affinoide Algebra B gibt mit der folgenden universellen Abbildungseigenschaft: ist $h : A \to C$ eine affinoide Abbildung mit $Sp\,h\,(Sp\,C) \subset U$, so existiert genau ein Homomorphismus $h' : B \to C$ mit $h = h' \circ j$.
Vermöge Sp j sind dann U und Sp B isomorph; man identifiziert sie und nennt A(U) := B die **Strukturalgebra** von U.
Die oben definierten speziellen affinoiden Teilbereiche sind affinoide Teilbereiche von Sp A mit der Strukturalgebra $A\langle\langle f_1,\ldots,f_n,g_1^{-1},\ldots,g_m^{-1}\rangle\rangle =$
$A \hat{\otimes}_k k\langle\langle X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m\rangle\rangle / (X_1 - f_1,\ldots,X_n - f_n, g_1 Y_1 - 1,\ldots,g_m Y_m - 1)$.

Die endlichen Vereinigungen von affinoiden Teilbereichen als zulässige offene Teilmengen und die endlichen Überdekkungen dieser zulässigen offenen Mengen durch affinoide Teilbereiche definieren auf dem maximalen Spektrum X = Sp A einer affinoiden Algebra A eine Grothendieck-Topologie T.

Der Funktor A(-) auf der Menge der affinoiden Teilbereiche von X erfüllt bezüglich endlicher Überdeckungen durch affinoide Teilbereiche nach [6] die Garbenaxiome für die zugehörige Grothendieck-Topologie T_0. Nach [1] kann dieser Funktor zu einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen bezüglich T fortgesetzt werden. Der lokal Grothendieck-geringte Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ heißt der zu A **assoziierte affinoide Raum**.

Ein lokal Grothendieck-geringter Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ heißt ein **holomorpher Raum**, wenn er eine lokal-endliche und bezüglich seiner Grothendieck-Topologie zulässige Überdekkung durch zulässige offene Teilmengen besitzt, die im obigen Sinne affinoide Räume sind. Jede solche Überdeckung heißt dann **holomorphe Überdeckung**.

Eine zulässige offene Teilmenge eines holomorphen Raumes X versehen mit der induzierten holomorphen Überdeckung heißt ein **offener Unterraum** von X.

Ein holomorpher Raum heißt **quasi-kompakt**, wenn er

eine endliche Überdeckung durch offene affinoide Unterräume besitzt.

Ist $X = \mathrm{Sp}\,A$ ein affinoider Raum, M ein endlicher A-Modul, so erhält man auf X eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\tilde{M}$, die jedem affinoiden Teilbereich $U = \mathrm{Sp}\,B$ von X den B-Modul $M \otimes_A B$ zuordnet. Man nennt $\tilde{M}$ die assoziierte Garbe zu M.

Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf einem holomorphen Raum X heißt kohärent, wenn es eine holomorphe Überdeckung von X $(U_i = \mathrm{Sp}\,A_i)_{(i \in I)}$ gibt, so daß für $i \in I$ $\mathcal{F}|_{U_i}$ assoziierte Garbe zu einem endlichen A_i-Modul M_i ist.

Nach [11], Satz 2.2. ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ auf einem affinoiden Raum $X = \mathrm{Sp}\,A$ genau dann kohärent, wenn er assoziierte Garbe zu einem endlichen A-Modul M ist.

Eine Teilmenge Y von X heißt holomorph, wenn es ein kohärentes Ideal $\mathcal{J}$ von $\mathcal{O}_X$ mit $Y = \mathrm{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ gibt. $(Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ heißt dann abgeschlossener Unterraum von X.

Sei $X = \mathrm{Sp}\,A$ ein affinoider Raum.

Sind $f_1,\ldots,f_n \in A$, so nennt man den speziellen affinoiden Teilbereich $\{ x \in X \mid |f_i(x)| \leq 1,\ i = 1,\ldots,n \}$ auch einen Weierstraß-Teilbereich von X.

Sind $f_0,f_1,\ldots,f_n \in A$ ohne gemeinsame Nullstellen, so heißt $U := \{ x \in X \mid |f_i(x)| \leq |f_0(x)|,\ i = 1,\ldots,n \}$ ein rationaler Teilbereich von X [6]; es ist $A(U) = A \ll f_0^{-1}f_1,\ldots,f_0^{-1}f_n \gg$.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A, $(a_1,\ldots,a_m)$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$ und $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m \in |k^*|$, so heißt der Weierstraß-Teilbereich $U(\underline{a},\underline{\varepsilon}) := \{ x \in X \mid |a_j(x)| \leq \varepsilon_j,\ j = 1,\ldots,m \}$ eine Schlauchumgebung des abgeschlossenen affinoiden Unterraumes $N(\mathfrak{a}) := \{ x \in X \mid a_j(x) = 0,\ j = 1,\ldots,m \}$.

Sei $\mathring{A} := \{ f \in A \mid |f| \leq 1 \}$. Sind $f_1,\ldots,f_n \in \mathring{A}$ und erzeugen sie in $\mathring{A}$ das Einsideal, so heißt die Überdeckung von X durch die speziellen affinoiden Teilbereiche $U_i := \{ x \in X \mid |f_i(x)| = 1 \}$, $i = 1,\ldots n$, eine formel-

le Überdeckung.

Sind $f_1,\dots,f_n \in A$, so heißt die Überdeckung von X durch die speziellen affinoiden Teilbereiche
$U_{\underline{\nu}} := \{ x \in X \mid |f_i(x)|^{\nu_i} \leq 1,\ i = 1,\dots,n \}$, $\underline{\nu} \in \{+1,-1\}^n$
eine Laurent-Überdeckung vom Typ 2^n.

Bekannt ist (vgl. etwa [10], Satz 1.6.)

Hilfssatz 1.1. Sei A eine affinoide Algebra, $a = (a_1,\dots,a_m)$ ein Ideal von A. Ist U ein affinoider Teilbereich von Sp A und $N(a) \subset U$, so gibt es ein $\varepsilon \in |k^*|$, so daß $U(\underline{a},\underline{\varepsilon}) \subset U$.

Folgerung 1.2. Sei A eine affinoide Algebra, $a = (a_1,\dots,a_m)$ ein Ideal von A. Sind U_1, U_2 affinoide Teilbereiche von Sp A mit $U_1 \cap N(a) = U_2 \cap N(a)$, so gibt es ein $\varepsilon \in |k^*|$, so daß $U_1 \cap U(\underline{a},\underline{\varepsilon}) = U_2 \cap U(\underline{a},\underline{\varepsilon})$.

Begründung: Man betrachte $U_1 \cap U_2$.

Bemerkung 1.3. Sei A eine affinoide Algebra, $a \subset A$ ein Ideal. Jeder spezielle affinoide Teilbereich von $N(a) = \mathrm{Sp}\, A/a$ ist Durchschnitt eines speziellen affinoiden Teilbereichs von $X = \mathrm{Sp}\, A$ mit $N(a)$.

Hilfssatz 1.4. (vgl. [10], Folgerung 1.7.) Sei A eine affinoide Algebra, $a \subset A$ ein Ideal. Sei $(V_i)_{(i=1,\dots,n)}$ eine Überdeckung von $\mathrm{Sp}\, A/a$ durch spezielle affinoide Teilbereiche V_i von $\mathrm{Sp}\, A/a$. Dann gibt es eine Schlauchumgebung $U = \mathrm{Sp}\, A'$ von $N(a)$ in Sp A und eine Überdeckung $(U_i)_{(i=1,\dots,n)}$ von U durch spezielle affinoide Teilbereiche U_i von U, so daß $U_i \cap N(a) = V_i$, $i = 1,\dots,n$.

Hilfssatz 1.5. Sei A eine affinoide Algebra, $a \subset A$ ein Ideal, $V \subset \mathrm{Sp}\, A/a$ ein rationaler Teilbereich. Dann gibt es eine Schlauchumgebung $U = \mathrm{Sp}\, A'$ von $N(a)$ in Sp A und einen rationalen Teilbereich W in U, so daß $W \cap N(a) = V$.

Beweis: Seien $f_o, f_1, \dots f_n \in A$ ohne gemeinsame Nullstellen auf $N(a)$ und $V = \{ x \in N(a) \mid |f_i(x)| \leq |f_o(x)|,\ i = 1,\dots,n \}$.

Dann gibt es eine Schlauchumgebung U von $N(a)$ in Sp A, auf der $f_o, f_1, \ldots, f_n$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzen, und $W = \{ x \in U \mid |f_i(x)| \leq |f_o(x)|, i = 1,\ldots,n \}$ leistet das Gewünschte.

Hieraus erhält man leicht

Folgerung 1.6. Sei A eine affinoide Algebra, $a \subset A$ ein Ideal. $(V_i)_{(i=1,\ldots,n)}$ sei eine Überdeckung von $N(a)$ durch rationale Teilbereiche V_i, $i = 1,\ldots,n$ von Sp A/a. Dann gibt es eine Schlauchumgebung $U = \mathrm{Sp}\, A'$ von $N(a)$ in Sp A und eine Überdeckung $(U_i)_{(i=1,\ldots,n)}$ von U durch rationale Teilbereiche U_i von U, so daß $U_i \cap N(a) = V_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Hilfssatz 1.7. Sei A eine affinoide Algebra, a ein Ideal von A und M ein endlicher A-Modul. Sind $m_1, \ldots m_n \in M$ Elemente, deren Restklassen den A/a-Modul M/aM erzeugen, so gibt es eine Schlauchumgebung $U = \mathrm{Sp}\, A'$ von $N(a)$ in Sp A, so daß der A'-Modul $M \otimes_A A'$ von den Bildern der m_i in $M \otimes_A A'$, $i = 1,\ldots,n$, erzeugt wird.

Beweis: Sei $N = \sum_{j=1}^{n} A m_j$. Für alle $x \in N(a)$ ist $N_x + aM_x = M_x$, nach Nakayama daher $N_x = M_x$, und somit $N(a) \cap \mathrm{supp}(M/N) = \emptyset$. Dann gibt es sogar eine Schlauchumgebung $U = \mathrm{Sp}\, A'$ von $N(a)$ in Sp A, so daß $U \cap \mathrm{supp}(M/N) = \emptyset$.

Hilfssatz 1.8. Sei A eine affinoide Algebra, A_o ein E-Untermodul von A, der die Topologie auf A definiert, und $M = \sum_{i=1}^{n} A m_i$ ein endlicher A-Modul. Sind $m_i' \in M$, $i = 1,\ldots,n$, derart, daß es ein $c \in k$, $|c| < 1$ gibt mit $m_i - m_i' \in c \sum_{j=1}^{n} A_o m_j$, $i = 1,\ldots,n$, so bildet auch $(m_1', \ldots, m_n')$ ein Erzeugendensystem von M über A.

Beweis: Es ist $M_o := \sum_{i=1}^{n} A_o m_i$ ein die Topologie auf M definierender E-Untermodul.
$\sum_{i=1}^{n} A_o m_i = \sum_{i=1}^{n} A_o m_i' + \sum_{i=1}^{n} A_o (m_i - m_i')$, daher $M_o \subset \sum_{i=1}^{n} A_o m_i' + c M_o$, und die Behauptung folgt nach [14], Prop. 3.1.

Definition 1.9. (vgl. [11], Def. 2.3.)

Ein holomorpher Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ heißt ein quasi-Steinscher Raum, wenn er eine zulässige Überdeckung durch offene affinoide Unterräume $(U_i)_{(i \in \mathbb{N})}$ besitzt, so daß für $i \in \mathbb{N}$ $U_i \subseteq U_{i+1}$ und das Bild von $\mathcal{O}_X(U_{i+1})$ in $\mathcal{O}_X(U_i)$ dicht liegt.

Ein quasi-Steinscher Raum $(X,\mathcal{O}_X)$ heißt Steinsch, wenn eine Ausschöpfung $(U_i)_{(i \in \mathbb{N})}$ wie oben so gewählt werden kann, daß zusätzlich für $i \in \mathbb{N}$ $U_i = \mathrm{Sp}\, A_i$ ein Weierstraß-Teilbereich von $U_{i+1} = \mathrm{Sp}\, A_{i+1}$ von folgender Form ist: $U_i = \{ x \in U_{i+1} \mid |f_j^{(i+1)}(x)| \leq |a_j^{(i)}| \ , \ j = 1,\ldots,n_i \}$, wobei $a_j^{(i)} \in k$, $0 < |a_j^{(i)}| < 1$ für $j = 1,\ldots,n_i$ und $\{ f_1^{(i+1)},\ldots,f_{n_i}^{(i+1)} \}$ ein affinoides Erzeugendensystem von A_{i+1} ist.

Anmerkung: Diese Definition ist etwas allgemeiner als die von Kiehl in [11], bei der die "Radien" stets gleich gewählt werden, d.h. $a_j^{(i)} = a^{(i)}$ für $j = 1,\ldots,n_i$, $i \in \mathbb{N}$, und die auch von Lütkebohmert in [12] verwendet wird. Die dort geführten Beweise der Einbettungssätze lassen sich jedoch unmittelbar (bei etwas mehr Schreibarbeit für die Indizes) auf die oben definierten Steinschen Räume übertragen. Wir vermuten darüberhinaus, daß die obige Definition tatsächlich n i c h t allgemeiner als die in [11] ist.

§ 2 Der quasi-kompakte Fall

Das "lokale" Problem – Existenz einer offenen affinoiden Umgebung für einen abgeschlossenen affinoiden Unterraum in einem quasi-kompakten holomorphen Raum – wird im Beweis von Satz 2.8. reduziert auf den Fall, daß der Unterraum regulär ist und seine Strukturalgebra eine Liftungseigenschaft (vgl. Def. 2.1.) besitzt. Mehr oder weniger formale Argumentation (Beweis von Satz 2.5.) gestattet es, zusätzlich zu reduzieren auf den Fall einer zweielementigen holomorphen Überdeckung.

Der Beweis für diesen Spezialfall (Satz 2.3.) stützt sich wesentlich darauf, daß man im Durchschnitt "Produktsituation" herstellen kann ($U_{12} \cong V_{12} \times E^n$); dies ist die Stelle, an der die Voraussetzung, daß der umgebende Raum (in allen Punkten des abgeschlossenen Unterraumes) regulär ist, benötigt wird.

Definition 2.1. Eine affinoide Algebra A besitzt die Liftungseigenschaft, wenn es zu jedem Homomorphismus $\varphi : A \to B/b$ von A in den Faktorring einer affinoiden Algebra B nach einem Ideal b eine Schlauchumgebung Sp B' von $N(b)$ in Sp B und einen Homomorphismus $\varphi' : A \to B'$ gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi'} & B' \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow \\ B/b & = & B'/bB' \end{array}$$

kommutativ ist.

Bemerkung 2.2. Besitzt eine affinoide Algebra A die Liftungseigenschaft, so gilt das auch für die Strukturalgebra A' eines affinoiden Teilbereiches von Sp A.

Begründung: Sei $\varphi : A' \to B/b$ gegeben. Dann existieren eine Schlauchumgebung Sp B' von $N(b)$ in Sp B und ein Homomorphismus $\psi : A \to B'$, so daß kommutiert.

$$\begin{array}{ccccc} & & B' & & \\ & \overset{\psi}{\nearrow} & & \searrow & \\ A & \to & A' & \overset{\varphi}{\to} & B/b = B'/bB' \end{array}$$

Es ist $Sp(A' \hat{\otimes}_A B) = (Sp\,\psi)^{-1}(Sp\,A')$ ein affinoider Teilbereich von $Sp\,B'$, der $N(b)$ und daher sogar eine Schlauchumgebung $Sp\,B''$ von $N(b)$ enthält.

Alle auftretenden Algebren bzw. Räume seien für den Rest dieses Paragraphen reduziert.

Satz 2.3. Seien $U = U_1 \cup U_2$ ein holomorpher Raum, $U_i = Sp\,B_i$ offene affinoide Unterräume von U, i=1,2, V ein abgeschlossener Unterraum von U zur kohärenten Idealgarbe J, so daß

(i) V affinoid ist;

(ii) die Strukturalgebra A_{12} von $V_{12} := V \cap U_1 \cap U_2$ regulär ist und die Liftungseigenschaft besitzt;

(iii) U in allen Punkten von V_{12} regulär ist;

(iv) $J/J^2(V_{12})$ freier A_{12}-Modul mit einer Basis aus über ganz V definierten Schnitten ist.

Dann gibt es affinoide Teilbereiche U_i' von U_i, i = 1,2, mit $U_i' \cap V = U_i \cap V$, so daß für alle $s \geq 0$ die "Beschränkung" $H^1((U_i)_{(i=1,2)}, J^s) \longrightarrow H^1((U_i')_{(i=1,2)}, J^s)$ die Nullabbildung ist.

Beweis: Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein. B_{12} sei die Strukturalgebra von $U_{12} = U_1 \cap U_2$; $b_i \subset B_i$ sei das Ideal $J(U_i)$, i = 1,2. Dann ist $A_i = B_i/b_i$ die Strukturalgebra zu $V_i = V \cap U_i$, i = 1,2. $b_{12} := b_1 B_{12} = b_2 B_{12}$.

Seien $g_1, \ldots g_m \in J/J^2(V)$, so daß ihre Beschränkungen auf V_{12} eine Basis von b_{12}/b_{12}^2 über A_{12} bilden.

Seien $g_\mu^{(i)} \in b_i$ Urbilder der $g_\mu | V_i$, $\mu = 1, \ldots, m$, i = 1,2.

Für $\varepsilon \in |k^*|$ sei $U_i(\varepsilon) := \{ x \in U_i \mid |g_\mu^{(i)}(x)| \leq \varepsilon$, $\mu = 1, \ldots, m \}$ und $B_i(\varepsilon)$ die zugehörige Algebra, i = 1,2.

Es gibt ein $c \in k^*$, so daß mit $\varepsilon = |c|$ gilt:

(a) für i = 1,2 wird das Ideal $b_{12}\hat{\otimes}_{B_i}B_i(\varepsilon) \subset B_{12}\hat{\otimes}_{B_i}B_i(\varepsilon)$ von den Bildern der $g_\mu^{(i)}$, $\mu = 1,\ldots,m$, erzeugt (vgl. Hilfssatz 1.7.);

(b) $U_1(\varepsilon) \cap U_{12} = U_2(\varepsilon) \cap U_{12} =: U_{12}(\varepsilon)$, $B_{12}(\varepsilon)$ bezeichne die zugehörige Strukturalgebra;

(c) es existiert ein Homomorphismus $\varphi : A_{12} \to B_{12}(\varepsilon)$, so daß $\pi\circ\varphi = \mathrm{id}$, wo $\pi : B_{12}(\varepsilon) \to A_{12}$ die Projektion bezeichnet (Liftungseigenschaft);

(d) der durch φ und $Z_\mu \mapsto c^{-1}g_\mu^{(1)}$ definierte Homomorphismus $\psi : A_{12}\ll Z_1,\ldots,Z_m\gg \to B_{12}(\varepsilon)$ ist surjektiv ([10], Folgerung 1.9.).

Aus Dimensionsgründen folgt dann mit [9], O_{IV}, Cor.(17.1.9), Prop.(16.3.7), daß ψ auch injektiv ist.

Daher kann man o.E. annehmen: $|g_\mu^{(i)}| = 1$, $\mu = 1,\ldots,m$, $i = 1,2$, und $A_{12}\ll Z_1,\ldots,Z_m\gg \to B_{12}$, $Z_\mu \to g_\mu^{(1)}$, $\mu = 1,\ldots,m$.

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\pi_1} & A_1 \\ \oplus & & \oplus \\ B_2 & \xrightarrow{\pi_2} & A_2 \end{array} \xrightarrow{\partial} A_{12}$$

gibt es eine Konstante $M \in \mathbb{R}_+^*$, so daß für alle $a \in A_{12}$ Elemente $b_i \in B_i$, $i = 1,2$, existieren mit
$a = \pi_2(b_2)|_{12} - \pi_1(b_1)|_{12}$ und $|b_i| \le M|a|$.

Sei nun $s \ge 0$ und $h^{(s)} \in b_{12}^s$. Dann ist

$$h^{(s)} = \sum_{|\underline{\nu}|\ge s} \varphi(a_{\underline{\nu}})\, \underline{g}^{(1)\underline{\nu}}, \qquad |h^{(s)}| = \max_{\underline{\nu}} |a_{\underline{\nu}}|.$$

Wir wählen für alle $\underline{\nu} \in \mathbb{N}^m$ mit $|\underline{\nu}| = s$ Elemente $b_{\underline{\nu}}(i) \in B_i$ mit $|b_{\underline{\nu}}(i)| \le M|a_{\underline{\nu}}|$ und $\varphi(a_{\underline{\nu}}) - b_{\underline{\nu}}(2)|_{12} + b_{\underline{\nu}}(1)|_{12} \in b_{12}$ und setzen

$$h^{(s)}(i) := \sum_{|\underline{\nu}|=s} b_{\underline{\nu}}(i)\, \underline{g}^{(i)\underline{\nu}} \in b_i^s, \quad i = 1,2.$$

Wegen $\sum_{|\underline{\nu}|=s} (\varphi(a_{\underline{\nu}})\underline{g}^{(1)\underline{\nu}} - b_{\underline{\nu}}(2)\underline{g}^{(2)\underline{\nu}} + b_{\underline{\nu}}(1)\underline{g}^{(1)\underline{\nu}}) =$

$$\sum_{|\underline{\nu}|=s} [(\varphi(a_{\underline{\nu}}) - b_{\underline{\nu}}(2) + b_{\underline{\nu}}(1))\underline{g}^{(1)\underline{\nu}} + b_{\underline{\nu}}(2)(\underline{g}^{(1)\underline{\nu}} - \underline{g}^{(2)\underline{\nu}})]$$

ist $h^{(s+1)} := h^{(s)} - h^{(s)}(2)|_{12} + h^{(s)}(1)|_{12} \in b_{12}^{s+1}$
und $|h^{(s+1)}| \leq M\,|h^{(s)}|$.

Induktiv definiert man auf diese Weise für $t \geq 0$ Elemente
$h^{(s+t)}(i) = \sum_{|\underline{\nu}|=s+t} b_{\underline{\nu}}(i)\underline{g}^{(i)\underline{\nu}} \in b_i^{s+t}$ mit $|b_{\underline{\nu}}(i)| \leq M^{t+1}|h^{(s)}|$
für $i = 1,2$, so daß
$h^{(s+t+1)} := h^{(s+t)} - h^{(s+t)}(2)|_{12} + h^{(s+t)}(1)|_{12} \in b_{12}^{s+t+1}$
und $|h^{(s+t+1)}| \leq M^{t+1}|h^{(s)}|$.

Wählt man $c \in k^*$, so daß $M|c| < 1$, so wird in
$B_i' := B_i\langle\langle c^{-1}g_1^{(i)},\ldots,c^{-1}g_m^{(i)}\rangle\rangle$ durch
$h(i) := \sum_{|\underline{\nu}|\geq s} b_{\underline{\nu}}(i)\underline{g}^{(i)\underline{\nu}}$ eine strikt konvergente Potenzreihe
$h(i) \in b_i^s B_i'$, $i = 1,2$, definiert, und es gilt
$h^{(s)}|_{U_{12}'} - h(2)|_{U_{12}'} + h(1)|_{U_{12}'} \in \bigcap_{t=0}^{\infty} b_{12}^{s+t}B_{12}' = (0)$.
wo $U_{12}' = \mathrm{Sp}\,B_1' \cap \mathrm{Sp}\,B_2'$ und $B_{12}' = A(U_{12}')$.

Folgerung 2.4. Sind unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Satz 2.3. $V_i = U_i \cap V$, $i = 1,2$, spezielle affinoide Teilbereiche von V, so existiert ein offener affinoider Unterraum W von U, der V enthält.

Beweis: Sei $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n) : V \to E^n$ eine abgeschlossene Einbettung affinoider Räume, $\varphi^* : T_n \to A$ der zugehörige Epimorphismus, $a = \mathrm{Ker}\,\varphi^* = (g_1,\ldots,g_s)$.

Seien $\bar{h}_1,\ldots,\bar{h}_m \in J/J^2(V)$ Erzeugende.

Nach Satz 2.3. gibt es affinoide Umgebungen U_i' von V_i in U_i, $i = 1,2$, und holomorphe Funktionen $f_\nu \in \mathcal{O}(U_1' \cup U_2')$, $h_\mu \in J(U_1' \cup U_2')$, so daß $f_\nu|_V = \varphi_\nu$, $\nu = 1,\ldots,n$, $h_\mu|_V = \bar{h}_\mu$, $\mu = 1,\ldots,m$.

Wir schreiben i.f. wieder U_i statt U_i'.

Für $\varepsilon \in |k^*|$ seien
$U_i(\varepsilon) = \{ x \in U_i \mid |h_\mu(x)| \leq \varepsilon,\ \mu = 1,\ldots,m \}$, $i = 1,2$.

Es gibt ein $\varepsilon_1 \in |k^*|$, so daß für $i = 1,2$

(a) das Ideal $b_i B_i(\varepsilon_1)$ von den $h_\mu|U_i(\varepsilon_1)$, $\mu = 1,\ldots,m$ erzeugt wird (Hilfssatz 1.7.);

(b) $|f_\nu|U_i(\varepsilon_1)| = |\varphi_\nu|V_i|$, $\nu = 1,\ldots,n$ ([10], Hilfssatz 1.5.).

Wegen (b) ist dann $\psi := (f_1,\ldots,f_n) : U_1(\varepsilon_1) \cup U_2(\varepsilon_1) \to E^n$ wohldefiniert und $\psi_{|V} = \varphi$.

Die Überdeckung $V = V_1 \cup V_2$ läßt sich nach Hilfssatz 1.4. in eine Schlauchumgebung von $N(a)$ in E^n fortsetzen; genauer gibt es ein $\rho_1 \in |k^*|$ und eine Überdeckung von $S(\rho_1) := \{ x \in E^n \mid |g_\sigma(x)| \le \rho_1,\ \sigma = 1,\ldots,s \}$ durch spezielle affinoide Teilbereiche $S_i(\rho_1)$, so daß $\varphi^{-1}(S_i(\rho_1)) = V_i$, $i = 1,2$.

Dann gibt es ein $\rho_2 \in |k^*|$, $\rho_2 \le \rho_1$, und ein $\varepsilon_2 \in |k^*|$, $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$, so daß $U_i(\varepsilon_2) \subset \psi^{-1}(S_i(\rho_2)) \subset U_i(\varepsilon_1)$, $i = 1,2$.

Für $i = 1,2$ ist
$\chi_i := (\psi|_{U_i(\varepsilon_2)}, \underline{h}|_{U_i(\varepsilon_2)}) : U_i(\varepsilon_2) \to S_i(\rho_2) \times E^m_{\varepsilon_2}$
eine holomorphe Abbildung affinoider Räume,
$\chi_i^{-1}(S_i(\rho_2) \times \{0\}) = V_i$ und $\chi_i|_{V_i} = \varphi|_{V_i} : V_i \to S_i(\rho_2)$
eine abgeschlossene Einbettung.

Nach [10], Folgerung 1.9. gibt es dann ein $\varepsilon_3 \in |k^*|$, $\varepsilon_3 \le \varepsilon_2$, so daß für $i = 1,2$ $U_i(\varepsilon_3) \to S_i(\rho_2) \times E^m_{\varepsilon_3}$ eine abgeschlossene Einbettung affinoider Räume ist.

Dann ist $(f_1,\ldots,f_n,h_1,\ldots,h_m) : U_1(\varepsilon_3) \cup U_2(\varepsilon_3) \to S(\rho_2) \times E^m_{\varepsilon_3}$
eine abgeschlossene Einbettung und damit
$W := U_1(\varepsilon_3) \cup U_2(\varepsilon_3)$ affinoid.

Satz 2.5. Seien U ein regulärer quasi-kompakter holomorpher Raum, V ein regulärer abgeschlossener Unterraum von U zur kohärenten Idealgarbe J. V sei affinoid, die zugehörige Strukturalgebra A besitze die Liftungseigenschaft und $J/J^2(V)$ sei frei über A. Dann existiert ein offener affinoider Unterraum W von U, der V enthält.

Beweis: Sei $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ eine Überdeckung von U durch offene affinoide Unterräume U_i, $i = 1,\ldots,n$. $(V_i)_{(i = 1,\ldots,n)}$ $V_i = V \cap U_i$ sei die auf V induzierte Überdeckung.

Nach Bemerkung 2.2. besitzt die Strukturalgebra eines jeden affinoiden Teilbereiches von V die Liftungseigenschaft.

1. Schritt: $(V_i)_{(i = 1,\ldots,n)}$ sei eine Laurent- bzw. eine formelle Überdeckung von V.

(a) $(V_i)_{(i = 1,\ldots,n)}$ sei eine Laurent-Überdeckung vom Typ 2^m, $n = 2^m$.
Der Fall $m = 1$ ergibt sich aus der Folgerung 2.4., der Rest ist formale Induktion.

(b) $(V_i)_{(i = 1,\ldots,n)}$ sei eine formelle Überdeckung.
Wir führen den Beweis durch Induktion über n.

Sei $n \geq 1$. Seien $f_1,\ldots,f_n,f_{n+1} \in \mathring{A}$, so daß sie in $\mathring{A}$ das Einsideal erzeugen, und so daß $V_i = \{ x \in V \mid |f_i(x)| \geq 1 \}$ für $i = 1,\ldots,n,n+1$.
Seien $g_1,\ldots,g_n,g_{n+1} \in \mathring{A}$ mit $1 = g_1f_1 + \ldots + g_nf_n + g_{n+1}f_{n+1}$.

Wir setzen $g = g_1f_1 + \ldots + g_nf_n$,
$V' = \{ x \in V \mid |g(x)| \geq 1 \}$, $A' = A\langle\langle g^{-1}\rangle\rangle$.

Die Bilder der $f_1,\ldots,f_n$ erzeugen in $\mathring{A}'$ das Einsideal und $(V_i \cap V')_{(i = 1,\ldots,n)}$ bildet eine formelle Überdeckung von V'.

Nach Bemerkung 1.3. existieren für $i = 1,\ldots,n$ spezielle affinoide Teilbereiche U_i' in U_i mit $U_i' \cap V_i = V' \cap V_i$.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein offener affinoider Unterraum U' von $\bigcup_{i=1}^{n} U_i'$ mit $U' \cap V = V'$.

$U' \cup U_{n+1}$ und V erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2.3.; V' und V_{n+1} sind spezielle affinoide Teilbereiche von V.

2. Schritt: $(V_i)_{(i = 1,\ldots,n)}$ sei eine Überdeckung von V durch spezielle affinoide Teilbereiche V_i.

Nach Tate [14] (vgl. [11], Hilfssatz 1.3.) gibt es eine Laurent-Überdeckung $(W_j)_{(j = 1,\ldots,m)}$ von V, so daß für $j = 1,\ldots,m$ $(W_j \cap V_i)_{(i = 1,\ldots,n)}$ eine formelle Überdeckung von W_j ist.

Für alle $i = 1,\ldots,n$ gibt es nach Bemerkung 1.3. spezielle affinoide Teilbereiche U_{ij} von U_i mit $U_{ij} \cap V_i = W_j \cap V_i$, $j = 1,\ldots,m$.
Nach (b) im 1.Schritt existiert für $j = 1,\ldots,m$ ein offener affinoider Unterraum U'_j von $\bigcup_{i=1}^{n} U_{ij}$, der W_j enthält, und nach (a) existiert ein offener affinoider Unterraum W von $\bigcup_{j=1}^{n} U'_j$, der V enthält.

3. Schritt: (vgl. [6], Beweis von Satz 2.3.)
$(V_i)_{(i = 1,\ldots,n)}$ sei eine Überdeckung von V durch rationale Teilbereiche V_i.

Für $i = 1,\ldots,n$ gibt es dann affinoide Funktionen $f_i, f_{i1},\ldots,f_{in_i} \in A$ ohne gemeinsame Nullstellen, so daß
$V_i = \{ x \in V \mid |f_{ij}(x)| \leq |f_i(x)|, j = 1,\ldots,n_i \}$.

Wir wählen $\varepsilon \in |k^*|$, so daß für $i = 1,\ldots,n$
$V_i \cap \{ x \in V \mid |f_i(x)| \leq \varepsilon \} = \emptyset$, und setzen
$W_i^+ := \{ x \in V \mid |f_i(x)| \leq \varepsilon \}$, $W_i^- := \{ x \in V \mid |f_i(x)| \geq \varepsilon \}$.
Für $I \subset \{1,\ldots,n\}$ sei $W_I := (\bigcap_{i \in I} W_i^-) \cap (\bigcap_{i \notin I} W_i^+)$.

Für alle $i = 1,\ldots,n$ gibt es nach Bemerkung 1.3. spezielle affinoide Teilbereiche U_{iI} von U_i mit $U_{iI} \cap V_i = W_I \cap V_i$.

Nach dem 2.Schritt existiert dann für $I \subset \{1,\ldots,n\}$ ein offener affinoider Unterraum U_I von $\bigcup_{i=1}^{n} U_{iI}$, der W_I enthält, und nach (a) im 1.Schritt existiert ein V umfassender offener affinoider Unterraum W von $\bigcup_{I \subset \{1,\ldots,n\}} U_I$.

4. Schritt: $(V_i)_{(i = 1,\ldots,n)}$ sei nun eine beliebige Überdeckung von V durch affinoide Teilbereiche V_i.

Nach [6], Satz 3.6. gibt es für $i = 1,\ldots,n$ rationale Teilbereiche V_{ij}, $j = 1,\ldots,m_i$ von V, so daß $V_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} V_{ij}$.
Für $i = 1,\ldots,n$ gibt es nach Folgerung 1.5. eine Schlauchumgebung U'_i von V_i in U_i und eine "Fortsetzung" $U'_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} U'_{ij}$ der rationalen Überdeckung $V_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} V_{ij}$.
$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m_i} U'_{ij} = U'$ ist ein offener Unterraum von U, $V \subset U'$, und die Überdeckung von U' führt zurück auf den 3.Schritt.

Für den entscheidenden Reduktionsschritt im Beweis des lokalen Hauptergebnisses benötigen wir folgenden

Satz 2.6. (vgl. [10], Satz 1.12.) Sei A eine reduzierte k-affinoide Algebra, $n = \dim A > 0$. Dann existieren ein endlicher Homomorphismus $\varphi : T_n = T \to A$ und ein Element $0 \neq t \in T$, so daß $T_t[Y]/P\,T_t[Y] \simeq A_{\varphi(t)}$, $Y \mapsto d$, wo $P \in T[Y]$ ein unitäres Polynom, $P(d) = 0$ und $P'(d)$ Einheit in $A_{\varphi(t)}$ ist.

Der Vollständigkeit halber geben wir einen Beweis.

Seien $p_1,\ldots,p_l$ die minimalen Primideale von A mit $\dim A/p_i = n$, $i = 1,\ldots,l$, und $q_1,\ldots,q_m$ diejenigen mit $\dim A/q_j < n$, $j = 1,\ldots,m$.

Wir zeigen: es existieren ein endlicher Homomorphismus $\varphi : T \to A$ und ein Element $0 \neq t \in T$, so daß $\mathrm{Sing}(A) \cup \bigcup_{j=1}^{m} V(q_j) \subset V(\varphi(t)A)$ und $\varphi_t : T_t \to A_{\varphi(t)}$ étale (d.h. flach und unverzweigt) ist. Die Behauptung des Satzes erhält man dann wie in [10], Folgerung 1.13.

1. Fall: $\mathrm{char}\, k = p > 0$. Es gibt ein $f \in A$, so daß gilt: $\dim A/fA < n$; $\mathrm{Sing}(A) \cup \bigcup_{j=1}^{m} V(q_j) \subset V(fA)$; $D(A|k)_f$ ist freier A_f-Modul mit einer Basis aus totalen Differentialen $dy_1,\ldots,dy_r$, $y_i \in A$, $|y_i| < 1$, $i = 1,\ldots,n$. Dabei bezeichnet $D(A|k)$ den universell-endlichen Differentialmodul von A über k [2].
Sei $\psi : T \to A$ eine Noethersche Normalisierung. Wir definieren $\varphi : T \to A$ durch $X_i \mapsto \psi(X_i)^p + y_i$, $i = 1,\ldots,n$. Nach [3], Satz 3.2. ist mit ψ auch φ endlich.

Sei $0 \neq t \in T$ mit $\delta(\varphi(t)) \subset \delta(f)$. Wegen $d\varphi(X_i) = dy_i$, $i = 1,\ldots,n$, ist $D(A_m|T_{\varphi^{-1}(m)}) = 0$ für alle $m \in \delta(\varphi(t)) \cap \mathrm{Sp}\, A$, also $T_t \to A_{\varphi(t)}$ étale.

2. Fall: $\mathrm{char}\, k = 0$. Sei $\psi : T \to A$ eine Noethersche Normalisierung; $A = \sum_{\sigma=1}^{s} \psi(T)a_\sigma$, wo $a_\sigma \in A$, $|a_\sigma| \leq 1$, $\sigma = 1,\ldots,s$. Dann ist $A_0 := \sum_{\sigma=1}^{s} \psi(\overset{\circ}{T})a_\sigma$ ein die Topologie von A definierender E-Untermodul von A.

Seien e, $c \in k^*$, $|e|$, $|c| < 1$, so daß $e\overset{\circ}{A} \subset cA_o$.
Es gibt ein $0 \neq t_1 \in T$, so daß
$\mathrm{Sing}(A) \cup \bigcup_{j=1}^{m} V(q_j) \subset V(\psi(t_1)A)$.
O.E. sei $t_1 \in \overset{\circ}{T}$ und $n = TX_1 + \ldots + TX_n \in \delta(t_1)$.

Ist für alle $m \in \mathrm{Sp}\,A$ mit $\psi^{-1}(m) = n$ $T_n \to A_m$ unverzweigt, so gibt es ein $t_2 \in T - n$, so daß $T_{t_2} \to A_{\psi(t_2)}$ unverzweigt ist, und $t = t_1 t_2$ leistet das Gewünschte.

Anderenfalls betrachten wir alle Homomorphismen $\chi : T \to A$, für die $\|\chi - \psi\| := \sup_{t \in T} |\chi(t) - \psi(t)| < \varepsilon := \min\{\eta, |e|\}$, wo $\eta := |t_1(n)|$.

Für alle solchen χ ist $(\mathrm{Sp}\chi)^{-1}(n) \subset \delta(\psi(t_1))$, daher $(\mathrm{Sp}\chi)^{-1}(n) \cap \mathrm{Sing}(A) = \emptyset$. Denn ist $m \in \mathrm{Sp}\,A$, $\chi^{-1}(m) = n$, so ist $|\psi(t_1)(m)| \geq \eta$ wegen
$\eta = |t_1(n)| = |\chi(t_1)(m)| \leq \max\{|\chi(t_1) - \psi(t_1)|, |\psi(t_1)(m)|\}$.

Für $f \in A_o$ ist

$$f = \sum_{\sigma=1}^{s} \psi(t_\sigma) a_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{s} \chi(t_\sigma) a_\sigma + \sum_{\sigma=1}^{s} [\psi(t_\sigma) - \chi(t_\sigma)] a_\sigma ,$$

$t_\sigma \in \overset{\circ}{T}$, $\sigma = 1,\ldots,s$, also $A_o \subset \sum_{\sigma=1}^{s} \chi(\overset{\circ}{T}) a_\sigma + cA_o$. Nach [14], Prop. 3.1. ist dann χ endlich und die Minimalzahl der Erzeugenden von A als $\chi(T)$-Modul kleiner oder gleich s.

Sei $F(\chi, n) = \{ m \in \mathrm{Sp}\,A \mid \chi^{-1}(m) = n,\ m \text{ liegt unverzweigt über } n \}$. Unter allen χ wie oben wählen wir ein χ_o, für das die Mächtigkeit von $F(\chi_o, n)$ maximal ist.

Angenommen, $F(\chi_o, n) \neq (\mathrm{Sp}\chi_o)^{-1}(n)$. Dann sei $F(\chi_o, n) = \{ m_1, \ldots, m_r \}$ und $m_o \in (\mathrm{Sp}\chi_o)^{-1}(n) - F(\chi_o, n)$.

Sei $\pi : m_o \to m_o/m_o^2$ und nach eventueller Umordnung $\{ \pi\chi_o(X_1), \ldots, \pi\chi_o(X_h) \}$, $1 \leq h < n$, eine maximale Teilmenge linear unabhängiger Elemente aus $\{ \pi\chi_o(X_i) \mid i = 1,\ldots,n \}$.
Man ergänze diese Teilmenge durch $w_{h+1}, \ldots, w_n \in m_o/m_o^2$ zu einer Basis und wähle Urbilder $y_{h+1}, \ldots, y_n \in m_o$, wobei o.E. $y_{h+i} \in \bigcap_{j=1}^{r} m_j^2$, $|y_{h+i}| < \varepsilon$, $i = 1,\ldots,n-h$.

Definiert man $\chi_1 : T \to A$ durch $X_i \mapsto \chi_0(X_i)$, $i = 1,\ldots,h$, $X_i \mapsto \chi_0(X_i) + y_i$, $i = h+1,\ldots,n$, so ist $\| \psi - \chi_1 \| < \varepsilon$ und $\{ m_0, m_1, \ldots, m_r \} \subset F(\chi_1, n)$.
Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von $F(\chi_0, n)$.

Bemerkung 2.7. Mit den Bezeichnungen des Satzes 2.6. gilt nach [10], Satz 1.16.: für alle $c \in k^*$ besitzt $A \ll c\,\varphi(t)^{-1} \gg$ die Liftungseigenschaft.

Das Hauptergebnis für den lokalen Fall ist

Satz 2.8. Sei U ein regulärer quasi-kompakter holomorpher Raum. Dann existiert zu jedem abgeschlossenen Unterraum V von U, der affinoid ist, ein offener affinoider Unterraum von U, der V enthält.

Beweis: Wir führen Induktion nach $d = \dim V$.
Für $d = 0$ ist die Behauptung trivial.
Sei $d > 0$. Sei A die Strukturalgebra von V. Nach Satz 2.6., und da U als regulär vorausgesetzt ist, existiert ein $f \in A$, so daß $\dim A/fA < d$, A_f von der Gestalt wie in Satz 2.6. und $(J/J^2(V))_f$ freier A_f-Modul ist. Dabei bestehe dessen Basis o.E. aus Beschränkungen von Elementen aus $J/J^2(V)$, wo J die Idealgarbe zu V ist.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein offener affinoider Unterraum W_1 in U, der N(fA) enthält. Nach Hilfssatz 1.1. gibt es ein $\varepsilon \in |k^*|$, so daß W_1 auch noch $V_1 := \{ x \in V \mid |f(x)| \leq \varepsilon \}$ enthält.

Sei $V_2 := \{ x \in V \mid |f(x)| \geq \varepsilon \}$. Nach Bemerkung 2.7. besitzt dessen Strukturalgebra die Liftungseigenschaft.

Ist $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ eine Überdeckung von U durch offene affinoide Unterräume U_i, so gibt es nach Bemerkung 1.3. für $i = 1,\ldots,n$ spezielle affinoide Teilbereiche U_i' in U_i mit $U_i' \cap V = U_i \cap V_2$.
$U' = \bigcup_{i=1}^{n} U_i'$ und V_2 erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2.5.; es folgt, daß es einen offenen affinoiden und V_2 umfassenden

Unterraum W_2 in U' gibt.

Der holomorphe Raum $W = W_1 \cup W_2$ und der abgeschlossene Unterraum V von W erfüllen die Voraussetzungen der Folgerung 2.4.

§ 3 GLOBALISIERUNG

Hilfssatz 3.1. Sei $T_{n+m} = k\ll X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m\gg$ $n, m \in \mathbb{N}^*$. Zu jedem $2nm$-Tupel positiver ganzer Zahlen $(s_{ij},t_{ij})_{(i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m)}$ gibt es eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m = N_1 \dot\cup N_2$, so daß gilt:

für alle $f = \sum_{(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in \mathbb{N}^{n+m}} c_{\underline{\nu}\underline{\mu}} \underline{X}^{\underline{\nu}}\underline{Y}^{\underline{\mu}} \in T_{n+m}$

konvergiert $f_1 = \sum_{(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in N_1} c_{\underline{\nu}\underline{\mu}} \underline{X}^{\underline{\nu}}\underline{Y}^{\underline{\mu}}$ auf

$W_1 := \{ (\underline{x},\underline{y}) \in E^n \times k^m \mid |x_i^{s_{ij}} y_j^{t_{ij}}| \leq 1,\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m \}$

und $f_2 = \sum_{(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in N_2} c_{\underline{\nu}\underline{\mu}} \underline{X}^{\underline{\nu}}\underline{Y}^{\underline{\mu}}$ auf

$W_2 := \{ (\underline{x},\underline{y}) \in k^n \times E^m \mid |x_i^{s_{ij}} y_j^{t_{ij}}| \leq 1,\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m \}$

und es ist

$\sup \{ |c_{\underline{\nu}\underline{\mu}}||\underline{x}^{\underline{\nu}}||\underline{y}^{\underline{\mu}}| \mid (\underline{\nu},\underline{\mu}) \in N_i,\ (\underline{x},\underline{y}) \in W_i \} \leq |f|,\ i = 1,2.$

Beweis: (durch Konstruktion)

Für $(\nu_1,\ldots,\nu_n,\mu_1,\ldots,\mu_m) \in \mathbb{N}^{n+m}$ definiert man

$$q_{11} := \min \left\{ \frac{1}{s_{11}}, \frac{1}{t_{11}} \right\},$$

und induktiv (von $i+j = h$ nach $h+1$ aufsteigend) weiter

$$q_{ij} := \min \left\{ \frac{\nu_i - \sum_{\kappa=1}^{j-1} q_{i\kappa} s_{i\kappa}}{s_{ij}}, \frac{\mu_j - \sum_{\lambda=1}^{i-1} q_{\lambda j} t_{\lambda j}}{t_{ij}} \right\}.$$

Dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein:

1. Fall: $\nu_i \geq \sum_{j=1}^{m} q_{ij} s_{ij}$ $\quad \mu_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} t_{ij}$

für $i = 1,\ldots,n$, für $j = 1,\ldots,m$

2. Fall: $\nu_i = \sum_{j=1}^{m} q_{ij} s_{ij}$ $\quad \mu_j \geq \sum_{i=1}^{n} q_{ij} t_{ij}$

für $i = 1,\ldots,n$, für $j = 1,\ldots,m$ und für mindestens ein $j \in \{1,\ldots,m\}$ gilt die strikte Ungleichung ">" zwischen den Termen.

Begründung: Zunächst bemerkt man, daß stets die Beziehung "≥" zwischen den Termen für alle $i = 1,\dots,n$ und alle $j = 1,\dots,m$ gilt.

Wenn nun nicht der 1. Fall eintritt, so gibt es ein $j' \in \{1,\dots,m\}$, so daß $\mu_{j'} > \sum_{i=1}^{n} q_{ij'} t_{ij'}$.

Dann ist für alle $i = 1,\dots,n$ $\mu_{j'} > \sum_{\lambda=1}^{i} q_{\lambda j'} t_{\lambda j'}$, also

$$q_{ij'} < \frac{\mu_{j'} - \sum_{\lambda=1}^{i-1} q_{\lambda j'} t_{\lambda j'}}{t_{ij'}}, \text{ d.h. } q_{ij'} = \frac{\nu_i - \sum_{\kappa=1}^{j'-1} q_{i\kappa} s_{i\kappa}}{s_{ij'}}$$

und damit $q_{ij} = 0$ für alle $j' < j \le m$.

Für alle $i = 1,\dots,n$ ist dann $\nu_i = \sum_{\kappa=1}^{m} q_{i\kappa} s_{i\kappa}$, d.h. 2. Fall.

Tritt für ein Indextupel $(\underline{\nu},\underline{\mu})$ der 1. Fall ein, so soll $(\underline{\nu},\underline{\mu})$ zu N_1 gehören, und zu N_2 im 2. Fall.

Für $(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in N_1$ erhält man dann

$$X_1^{\nu_1}\cdots X_n^{\nu_n} Y_1^{\mu_1}\cdots Y_m^{\mu_m} = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} (X_i^{s_{ij}} Y_j^{t_{ij}})^{q_{ij}} X_i^{\nu_i - \sum_{\kappa=1}^{m} q_{i\kappa} s_{i\kappa}}$$

und für $(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in N_2$ entsprechend

$$X_1^{\nu_1}\cdots X_n^{\nu_n} Y_1^{\mu_1}\cdots Y_m^{\mu_m} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} (X_i^{s_{ij}} Y_j^{t_{ij}})^{q_{ij}} Y_j^{\mu_j - \sum_{\lambda=1}^{n} q_{\lambda j} t_{\lambda j}}.$$

Hilfssatz 3.1. läßt sich interpretieren als "Azyklizitätsaussage mit Abschätzungen" für die aus W_1 und W_2 bestehende Überdeckung des Raumes

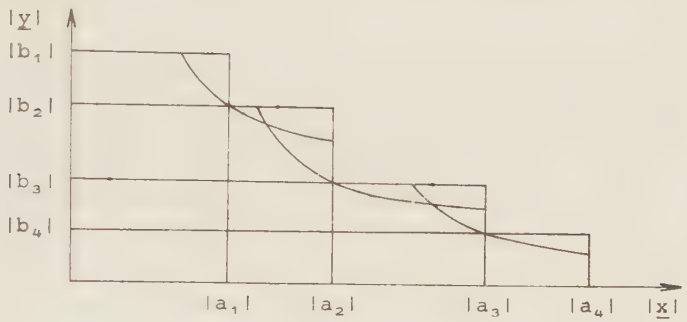
$$W = \{ (\underline{x},\underline{y}) \in k^{n+m} \mid |x_i|^{s_{ij}} |y_j|^{t_{ij}} \le 1,\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m \}.$$

Es ist nun naheliegend (s.[13] und Skizze 1 w.u.), wie man eine offene Steinsche Umgebung von $k^n \times \{0\}$ in $k^n \times k^m$ innerhalb eines vorgegebenen Polyzylindersystems $(P_\nu)_{(\nu \ge 1)}$ konstruiert; dabei sei

$$P_\nu = \{ (\underline{x},\underline{y}) \in k^{n+m} \mid |x_i| \le |a_\nu|,\ i = 1,\dots,n,\ |y_j| \le |b_\nu|,\ j = 1,\dots,m \},$$

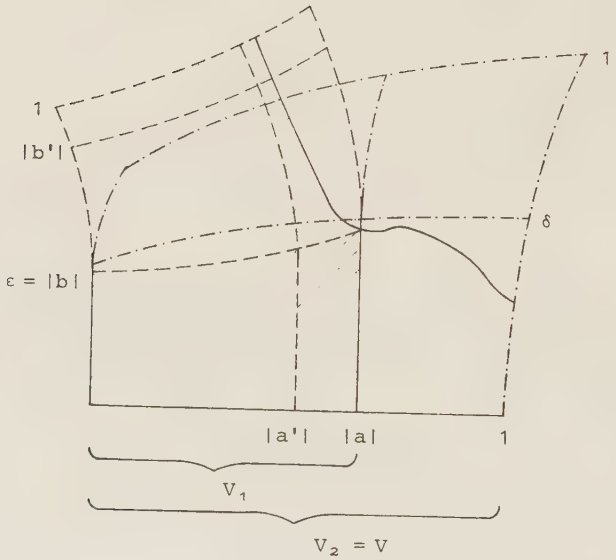
wo $(a_\nu)_{(\nu\ge1)}$, $(b_\nu)_{(\nu\ge1)} \subset k^*$, $|a_\nu| \to_{\nu\to\infty} \infty$, $b_\nu \neq 0$.

Skizze 1



Das Konstruktionsprinzip für den allgemeinen Fall ist das gleiche, nur wird die Situation komplizierter und das Konstruktionsverfahren unüberschaubarer dadurch, daß man nur lokale Koordinaten hat:
Jedes Kompaktum im abgeschlossenen Unterraum Y besitzt nach § 2 eine offene affinoide Umgebung U in X.
Auf Y hat man durch eine abgeschlossene Einbettung in einen k^n globale Koordinaten (Y ist Steinsch).
Deren Beschränkungen auf $U \cap Y$ lassen sich zu $\underline{x}$-Koordinaten auf U fortsetzen; dazu kommen (endlich viele) Erzeugende von J(U) als $\underline{y}$-Koordinaten.
Die Existenz einer Einbettung $Y \to k^n$ vereinfacht die Rechnungen erheblich, ist aber wohl nicht wesentlich.

Skizze zum Beweis von Satz 3.2.(a) w.u.



– – – – berandet : U_1 und Teilbereiche in U_1

– · – · – berandet : U_2 und Teilbereiche in U_2

□ – überdeckt : U_1'

□ – überdeckt : U_2'

Im folgenden seien wieder alle auftretenden Algebren bzw. Räume reduziert.

Satz 3.2. Seien $U = U_1 \cup U_2$ ein holomorpher Raum, $U_\nu = \mathrm{Sp}\, B_\nu$, $\nu = 1,2$, offene affinoide Unterräume von U, V ein abgeschlossener Unterraum von U zur kohärenten Idealgarbe J, $V = \mathrm{Sp}\, A$ affinoid und $V_2 := V \cap U_2 = V$. A besitze ein affinoides Erzeugendensystem $\{ f_1,\dots,f_n \}$ so daß $V_1 := V \cap U_1 = \{ x \in V \mid |f_i(x)| \le |a|,\ i = 1,\dots,n \}$ wo $a \in k^*$, $|a| < 1$.

Es seien $B_1 = k\langle\langle a^{-1}f_1^{(1)},\dots,a^{-1}f_n^{(1)},g_1^{(1)},\dots,g_{m_1}^{(1)}\rangle\rangle$

$B_2 = k\langle\langle f_1^{(2)},\dots,f_n^{(2)},g_1^{(2)},\dots,g_{m_2}^{(2)}\rangle\rangle$, wo $m_\nu \in \mathbb{N}^*$,

$f_i^{(\nu)}|V_\nu = f_i|V_\nu$, $i = 1,\dots,n$, $J(U_\nu) = \sum_{j=1}^{m_\nu} g_j^{(\nu)} B_\nu$, $\nu = 1,2$.

Seien schließlich $a' \in k^*$, $|a'| < |a|$,

$W := \{ x \in U_1 \mid |f_i^{(1)}(x)| \le |a'|,\ i = 1,\dots,n \}$,

$r' := \max_{j=1,\dots,m_1} |g_j^{(1)}|W|$, $b' \in k^*$, $|b'| < r'$ und

$W_o := \{ x \in W \mid |g_j^{(1)}(x)| \le |b'|,\ j = 1,\dots,m_1 \}$

Dann gibt es

(a) Weierstraß-Teilbereiche U_ν' von U_ν mit $V_\nu \subset U_\nu'$, $\nu = 1,2$, $W \subset U_1'$, so daß $H^1(U_1' \cup U_2', \mathcal{O}) = 0$, $H^1(U_1' \cup U_2', J) = 0$;

(b) Weierstraß-Teilbereiche U_ν'' von U_ν' mit $U_\nu'' \cap V = V_\nu$, $\nu = 1,2$, $W \subset U_1''$, so daß $U'' := U_1'' \cup U_2''$ affinoid ist, und die Strukturalgebra von U'' ein affinoides Erzeugendensystem $\{ F_1,\dots,F_n,G_1,\dots,G_m \}$, $m \ge m_1$, besitzt mit folgenden Eigenschaften:

(3.2.1) $F_i|V = f_i$, $i = 1,\dots,n$;

(3.2.2) $J(U'') = (G_1,\dots,G_m)$;

(3.2.3) $x \in U''$, $|F_i(x)| \le |a|$, $i = 1,\dots,n \Rightarrow x \in U_1''$;

(3.2.4) $|F_i|U_1'' - f_i^{(1)}|U_1''| < |a'|$, $i = 1,\dots,n$;

(3.2.5) $|G_j|U_1'' - g_j^{(1)}|U_1''| < |b'|$, $j = 1,\dots,m_1$;

(3.2.6) $|G_l|W_o| < r := \max_{j=1,\dots,m} |G_j|U_1''|$, $l = 1,\dots,m$.

Wir schließen zunächst an

Folgerungen 3.3.

(3.3.1) $U_1'' = \{ x \in U'' \mid |F_i(x)| \leq |a|, i = 1,\ldots,n \}$;

(3.3.2) $W = \{ x \in U'' \mid |F_i(x)| \leq |a'|, i = 1,\ldots,n \}$;

(3.3.3) $r' \leq r$ und $\max_{j=m_1+1,\ldots,m} |G_j|_{W_o} < r$;

(3.3.4) $W_o = \{ x \in U'' \mid |F_i(x)| \leq |a'|, i = 1,\ldots,n,$
$|G_j(x)| \leq |b'|, j = 1,\ldots,m_1 \}$.

Ist zudem $c \in k^*$ mit $\max_{j=m_1+1,\ldots,m} |G_j|_{W_o} \leq |c| < r$, so gilt auch $W_o = \{ x \in U'' \mid |F_i(x)| \leq |a'|, i = 1,\ldots,n,$
$|G_j(x)| \leq |b'|, j = 1,\ldots,m_1, |G_j(x)| \leq |c|, j = m_1+1,\ldots,m \}$,
d.h. W_o liegt "im Innern" von U'' bezüglich der gewählten Koordinaten.

Die Folgerungen ergeben sich unmittelbar aus (3.2.3) bis (3.2.6).

Beweis der Aussage (a) von Satz 3.2.

(a.1) Es gibt nach Folgerung 1.2. ein $\delta \in |k^*|$, so daß mit $U_2(\delta) := \{ x \in U_2 \mid |g_r^{(2)}(x)| \leq \delta, r = 1,\ldots,m_2 \}$ gilt: $x \in U_2(\delta) \Rightarrow [\, |f_i^{(2)}(x)| \leq |a|, i = 1,\ldots,n \Leftrightarrow x \in U_1]$.

(a.2) Es gibt nach Hilfssatz 1.1. ein $\varepsilon \in |k^*|$, so daß $U_1(\varepsilon) := \{ x \in U_1 \mid |g_j^{(1)}(x)| \leq \varepsilon, j = 1,\ldots,m_1 \}$ enthalten ist in $U_2(|a|,\delta) := \{ x \in U_2 \mid |f_i^{(2)}(x)| \leq |a|, i = 1,\ldots,n, |g_r^{(2)}(x)| \leq \delta, r = 1,\ldots,m_2 \}$.

Wegen (a.1) ist $U_2(|a|,\delta) \subset U_1$.

Sei o.E. $\varepsilon < |b'|$. Sei $b \in k$ mit $|b| = \varepsilon$. Dann ist

$$B_{12} := A(U_1(\varepsilon)) = k\langle\langle a^{-1}f_1^{(1)},\ldots,a^{-1}f_n^{(1)},b^{-1}g_1^{(1)},\ldots,b^{-1}g_{m_1}^{(1)}\rangle\rangle .$$

Sei $\| _ \|$ die zugehörige Restklassennorm auf B_{12} und $\| _ \|'$ die Restklassennorm auf $b_{12} := J(U_1(\varepsilon))$ bezüglich $m_1T_{n+m_1} \longrightarrow b_{12}$ $\quad e_j \mapsto b^{-1} g_j^{(1)}$, $j = 1,\ldots,m_1$.
Sei M eine Konstante mit $\| _ \|, \| _ \|' \leq M| _ |$.

(a.3) Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$. Wir wählen $f_i^* \in B_2$, $i = 1,\ldots,n$, $g_j^* \in b_2 := J(U_2)$, $j = 1,\ldots,m_1$, so daß

$|f_i^{(1)}|U_2(|a|,\delta) - f_i^*|U_2(|a|,\delta)| \le q\, M^{-1}|a|$, $i = 1,\dots,n$,

$|g_j^{(1)}|U_2(|a|,\delta) - g_j^*|U_2(|a|,\delta)| \le q\, M^{-1}|b|$, $j = 1,\dots,m_1$.

Sei $s \in \mathbb{N}^*$ (etwa minimal) mit $|a^{-1}a'|^s|b|^{-1} < 1$ und

$U_1' := \{ x \in U_1 \mid |(a^{-1}f_i^{(1)})^s(b^{-1}g_j^{(1)})(x)| \le 1,\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m_1\}$,

$U_2' := \{ x \in U_2 \mid |g_r^{(2)}(x)| \le \delta,\ r = 1,\dots,m_2,\ |g_j^*(x)| \le |b|,$
$|(a^{-1}f_i^*)^s(b^{-1}g_j^*)(x)| \le 1,\ i = 1,\dots,n,\ j=1,\dots,m_1\}$.

Dann gilt:

$U_{12}' := U_1' \cap U_2' = U_1(\varepsilon)$, $B_{12}' := A(U_{12}') = B_{12}$;

$U_1(\varepsilon) = \{ x \in U_2' \mid |f_i^{(2)}(x)| \le |a|,\ i = 1,\dots,n \}$;

$W \subset U_1'$; $V_i \subset U_i'$, d.h. $U_i' \cap V = V_i$, $i = 1,2$.

Jedes $h \in B_{12}$ (bzw. $h \in b_{12}$) besitzt eine Darstellung

$$h = \sum_{\substack{(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in \mathbb{N}^{n+m_1} \\ (\text{bzw. } |\underline{\mu}| \ge 1)}} c_{\underline{\nu}\underline{\mu}}\, a^{-|\underline{\nu}|} b^{-|\underline{\mu}|} (\underline{f}^{(1)})^{\underline{\nu}} (\underline{g}^{(1)})^{\underline{\mu}}$$

mit $|h| \le \|h\|$ (bzw. $\|h\|' = \max_{(\underline{\nu},\underline{\mu})} |c_{\underline{\nu}\underline{\mu}}| \le M|h|$.

Wir teilen gemäß Hilfssatz 3.1. zu $s_{ij} = s$, $t_{ij} = 1$ für $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m_1$ auf : $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^{m_1} = N_1 \dot\cup N_2$ und setzen

$$\tilde h(1) := -\sum_{(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in N_1} c_{\underline{\nu}\underline{\mu}}\, a^{-|\underline{\nu}|} b^{-|\underline{\mu}|} (\underline{f}^{(1)})^{\underline{\nu}} (\underline{g}^{(1)})^{\underline{\mu}},$$

$$\tilde h(2) := \sum_{(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in N_2} c_{\underline{\nu}\underline{\mu}}\, a^{-|\underline{\nu}|} b^{-|\underline{\mu}|} (\underline{f}^*)^{\underline{\nu}} (\underline{g}^*)^{\underline{\mu}}.$$

Dann sind für $i = 1,2$ $\tilde h(i) \in B_i' := A(U_i')$ (bzw. $\tilde h(i) \in b_i B_i'$) und $|\tilde h(i)| \le M|h|$. Mit $\tilde h := (\tilde h(1), \tilde h(2))$ ist

$$h - \partial\tilde h = \sum_{(\underline{\nu},\underline{\mu}) \in N_2} c_{\underline{\nu}\underline{\mu}}\, a^{-|\underline{\nu}|} b^{-|\underline{\mu}|} ((\underline{f}^{(1)})^{\underline{\nu}} (\underline{g}^{(1)})^{\underline{\mu}} - (\underline{f}^*)^{\underline{\nu}} (\underline{g}^*)^{\underline{\mu}})$$

auf U_{12}' und wegen (a.3) $|h - \partial\tilde h| \le M|h|\, qM^{-1} = q|h|$.

Setzt man nun für $h \in B_{12}$ (bzw. $h \in b_{12}$) $h^{(0)} := h$, wählt wie oben $\tilde h^{(0)} = (\tilde h^{(0)}(1), \tilde h^{(0)}(2))$ und definiert für $n \ge 1$ induktiv $h^{(n)} := h^{(n-1)} - \partial\tilde h^{(n-1)}$, so liefert $(h(1),h(2)) \in B_1' \times B_2'$ (bzw. $(h(1),h(2)) \in b_1B_1' \times b_2B_2'$), wo $h(i) := \sum_{n=0}^{\infty} \tilde h^{(n)}(i)$, $i = 1,2$, eine Lösung für h mit den Abschätzungen $|h(i)| \le M|h|$, $i = 1,2$.

Beweis der Aussage (b) von Satz 3.2.:

Wir betrachten auf B_1' die Restklassennorm bezüglich

$T_{n+m_1+nm_1} = k\langle\langle \underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}\rangle\rangle \twoheadrightarrow B_1'$

$X_i \mapsto a^{-1}f_i^{(1)}$, $i = 1,\ldots,n$,

$Y_j \mapsto g_j^{(1)}$, $j = 1,\ldots,m_1$,

$Z_{ij} \mapsto (a^{-1}f_i^{(1)})^s(b^{-1}g_j^{(1)})$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m_1$,

und auf B_2' die Restklassennorm bezüglich

$T_{n+m_2+m_1+nm_1} = k\langle\langle \underline{X}, \underline{Y}, \underline{Z}, \underline{W}\rangle\rangle \twoheadrightarrow B_2'$

$X_i \mapsto f_i^{(2)}$, $i = 1,\ldots,n$,

$Y_r \mapsto d^{-1}g_r^{(2)}$, $r = 1,\ldots,m_2$, wo $d \in k$ mit $|d| = \delta$,

$Z_j \mapsto b^{-1}g_j^{*}$, $j = 1,\ldots,m_1$,

$W_{ij} \mapsto (a^{-1}f_i^{*})\ (b^{-1}g_j^{*})$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m_1$.

Sei K eine Konstante, so daß zwischen der Restklassennorm $\|\ _\ \|$ und der Spektralnorm auf B_1' bzw. B_2' jeweils die Beziehung $\|\ _\ \| \le K|\ _\ |$ gilt.

Für $i = 1,2$ seien $b_i' = b_iB_i'$, $\overset{\circ}{b}_i' := \overset{\circ}{B}_i' \cap b_i'$,

$b_{1o}' := \sum_{j=1}^{m_1} \overset{\circ}{B}_1' g_j^{(1)}$, $b_{2o}' := \sum_{r=1}^{m_2} \overset{\circ}{B}_2'(d^{-1}g_r^{(2)})$.

Dann sind $b_{io}' \subset \overset{\circ}{b}_i'$ und es gibt ein $e \in k^*$, $|e| < 1$, so daß $\overset{\circ}{b}_i' \subset e^{-1}b_{io}'$, $i = 1,2$.

Da $U_{12}' = U_1(\varepsilon)$ ein Weierstraß-Teilbereich in U_2' ist, liegt für jeden endlichen B_2'-Modul M das Bild von M in $M \otimes_{B_2'} B_{12}$ dicht.

(b.1) Für $i = 1,\ldots,n$ seien $\tilde{f}_i \in b_2'$, so daß

$$|f_i^{(1)}|U_{12}' - (f_i^{(2)} + \tilde{f}_i)|U_{12}'| < M^{-1}K^{-1}\min\{|a'|, |ba|\} .$$

Sei $(f_i(1), f_i(2)) \in b_1' \times b_2'$ eine Lösung zu

$f_i^{(1)}|U_{12}' - (f_i^{(2)} + \tilde{f}_i)|U_{12}'$ mit $|f_i(v)| < K^{-1}\min\{|a'|, |ba|\}$, $v = 1,2$. Durch $F_i|U_1' := f_i^{(1)} + f_i(1)$ und $F_i|U_2' := f_i^{(2)} + \tilde{f}_i + f_i(2)$ werden dann Elemente $F_i \in \mathcal{O}(U_1' \cup U_2')$ definiert mit

(b.1.1) $F_i|V = f_i$;

(b.1.2) $\| F_{i|U_1'} - f_i^{(1)} \| \leq K |f_i(1)| \leq \min\{|a'|, |ba|\}$.

(b.2) Für $j = 1,\ldots,m_1$ wähle man $\tilde{g}_j \in b_2'$, so daß

$$|g_j^{(1)}|_{U_{12}'} - \tilde{g}_{j|U_{12}'}| < M^{-1}\min\{K^{-1}|b|, |e|^2\}$$

und zu $g_j^{(1)}|_{U_{12}'} - \tilde{g}_{j|U_{12}'}$ eine Lösung $(g_j(1), g_j(2)) \in b_1' \times b_2'$ mit $|g_j(\nu)| < \min\{K^{-1}|b|, |e|^2\}$, $\nu = 1,2$. Durch

$$G_{j|U_1'} := g_j^{(1)} + g_j(1), \quad G_{j|U_2'} := \tilde{g}_j + g_j(2)$$

werden Elemente $G_j \in J(U_1' \cup U_2')$ definiert mit

(b.2.1) $\| G_{j|U_1'} - g_j^{(1)} \| \leq K |g_j(1)| < |b|$ und

$$|G_{j|U_1'} - g_j^{(1)}| = |g_j(1)| < |e|^2.$$

Wegen (b.1.2), (b.2.1) und folglich

(b.2.2) $\| (F_i^s G_j)_{|U_1'} - f_i^{(1)s} g_j^{(1)} \| \leq K|F_i^s(G_j - g_j^{(1)}) + g_j^{(1)}(F_i - f_i^{(1)})(F_i^{s-1} + F_i^{s-2}f_i^{(1)} + \ldots + f_i^{(1)s-1})| < |a|^s|b|$

bildet nach [5], Hilfssatz 2.2. auch die Familie

$$\{a^{-1}F_{i|U_1'}, G_{j|U_1'}, (a^{-1}F_i)^s b^{-1}G_{j|U_1'}, i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m_1\}$$

ein affinoides Erzeugendensystem von B_1'.

Wegen (b.2.1) sind für $j = 1,\ldots,m_1$

$G_{j|U_1'} - g_j^{(1)} \in e^2 b_1'^{\circ} \subset e b_1'^{\circ}$; nach Hilfssatz 1.8. erzeugen auch $G_{1|U_1'}, \ldots, G_{m_1|U_1'}$ das Ideal b_1'.

(b.3) Es gibt ein $\eta \in |k^*|$, $\eta \leq \delta$, so daß

(b.3.1) $U_2(|a|,\eta) \subset U_1(\varepsilon) = U_{12}'$, wo $U_2(|a|,\eta) := \{x \in U_2 \mid |f_i^{(2)}(x)| \leq |a|, i = 1,\ldots,n, |g_r^{(2)}(x)| \leq \eta, r = 1,\ldots,m_2\}$;

(b.3.2) $U_2(\eta) := \{x \in U_2 \mid |g_r^{(2)}(x)| \leq \eta, r = 1,\ldots,m_2\} \subset U_2'$.

(b.4) Für $r = 1,\ldots,m_2$ seien $\tilde{h}_r \in b_1$, so daß

(b.4.1) $|g_r^{(2)}|_{U_{12}'} - \tilde{h}_{r|U_{12}'}| < M^{-1}\min\{K^{-1}\eta, |e|^2\}$.

O.E. kann man dabei annehmen, daß für $r = 1,\ldots,m_2$

(b.4.2) $|\tilde{h}_{r|W_o}| < |\tilde{h}_{r|W}|$ und $|\tilde{h}_{r|W}| \geq \eta$.

Begründung: Es gibt ein $j \in \{1,\dots,m_1\}$, so daß $|b'| < |g_j^{(1)}|_W|$. Ist nun $|\tilde{h}_r|_{W_o}| = |\tilde{h}_r|_W| \le |c|$, $c \in k^*$, so wähle man $q \in \mathbb{N}^*$ so groß, daß $|c||b'^{-1}b|^q < M^{-1}K^{-1}\eta$ und $|c||b'^{-1}g_j^{(1)}|_W|^q \ge \eta$ und betrachte $\tilde{\tilde{h}}_r := \tilde{h}_r + c(b'^{-1}g_j^{(1)})^q$. $\tilde{\tilde{h}}_r$ erfüllt (b.4.1) und es ist $|\tilde{\tilde{h}}_r|_{W_o}| \le |c|$, $|\tilde{\tilde{h}}_r|_W| = |c||b'^{-1}g_j^{(1)}|_W|^q > |c|$, $|\tilde{\tilde{h}}_r|_W| \ge \eta$.

Wir wählen zu $g_r^{(2)}|_{U_{12}'} - \tilde{h}_r|_{U_{12}'}$ eine Lösung $(h_r(1), h_r(2))$ aus $b_1' \times b_2'$ mit $|h_r(\nu)| < \min\{K^{-1}\eta, |e|^2\}$ und definieren $H_r \in J(U_1' \cup U_2')$ durch $H_r|_{U_1'} := \tilde{h}_r - h_r(1)$, $H_r|_{U_2'} := g_r^{(2)} - h_r(2)$. Dann ist für $r = 1,\dots,m_2$

(b.4.3) $\|H_r|_{U_2'} - g_r^{(2)}\| \le K|h_r(2)| < \eta \le \delta = |d|$;

und wegen (b.4.2) gelten die Beziehungen

(b.4.4) $|H_r|_{W_o}| < |H_r|_W| \le |H_r|_{U_1'}|$, $|H_r|_W| \ge \eta$.

Seien $d_r \in k$ mit $|d_r| = |H_r|_{U_1'}|$.

Aus $|H_r|_{U_2'} - g_r^{(2)}| = |h_r(2)| < |e|^2$ folgt zudem $H_r|_{U_2'} - g_r^{(2)} \in e^2 b_2' \subset e\, b_{2o}'$, $r = 1,\dots,m_2$; nach Hilfssatz 1.8. wird daher das Ideal b_2' auch von $H_1|_{U_2'},\dots,H_{m_2}|_{U_2'}$ erzeugt.

(b.5) Es gibt ein $d_o \in k^*$, $|d_o| \le \eta$, so daß mit

$$U_2'(|d_o|) := \{x \in U_2' \mid |H_r(x)| \le |d_o|,\ r = 1,\dots,m_2\}$$ gilt:

(b.5.1) $|F_i|_{U_2'(|d_o|)}| \le 1$, $i = 1,\dots,n$;

(b.5.2) $|G_j|_{U_2'(|d_o|)}| \le 1$, $j = 1,\dots,m_1$;

(b.5.3) $x \in U_2'(|d_o|) \Rightarrow [|F_i(x)| \le |a|, i = 1,\dots,n \Leftrightarrow x \in U_1']$;

(b.5.4) $T_{n+m_2} = k\langle\langle \underline{X}, \underline{Y}\rangle\rangle \to A(U_2'(|d_o|))$

$X_i \mapsto F_i|_{U_2'(|d_o|)}$, $i = 1,\dots,n$,

$Y_r \mapsto d_o^{-1}H_r|_{U_2'(|d_o|)}$, $r = 1,\dots,m_2$,

ist surjektiv ([10], Folgerung 1.9.).

Wir wählen $t \in \mathbb{N}^*$ (o.E. minimal), so daß für $r = 1,\dots,m_2$ $|a^{-1}a'|^t|d_o^{-1}d_r| < 1$, und setzen

$U_1'' := \{ x \in U_1' \mid |((a^{-1}F_\cdot)^t (d_0^{-1}H_r))(x)| \le 1 ,$
$i = 1,\dots,n , r = 1,\dots,m_2 \}$

$U_2'' := \{ x \in U_2' \mid |H_r(x)| \le |d_0|, |((a^{-1}F_i)^s (b^{-1}G_j))(x)| \le 1 ,$
$|((a^{-1}F_i)^t (d_0^{-1}H_r))(x)| \le 1 , i = 1,\dots,n, j = 1,\dots,m_1, r = 1,\dots,m_2 \}.$

Nach (b.1.2) ist $|F_{i|W}| \le |a'|$, $i = 1,\dots,n$, nach Wahl von t daher $W \subset U_1''$.

Da $H_{r|V} = 0$, $r = 1,\dots,m_2$, $G_{j|V} = 0$, $j = 1,\dots,m_1$, ist für $\nu = 1,2$ $V_\nu \subset U_\nu''$ und somit $U_\nu'' \cap V = V_\nu$.

Wir betrachten nun die Abbildung

$F := (F_1,\dots,F_n,G_1,\dots,G_{m_1},H_1,\dots,H_{m_2})$

$F : U_1'' \cup U_2'' \longrightarrow E^n(\underline{x}) \times E^{m_1}(\underline{y}) \times E^{m_2}_{(|d_1|,\dots,|d_{m_2}|)}(\underline{z}) =: P .$

Sei $D := \{ (\underline{x},\underline{y},\underline{z}) \in P \mid |x_i^s y_j| \le |a^s b| , |x_i^t z_r| \le |a^t d_0| ,$
$i = 1,\dots,n , j = 1,\dots,m_1, r = 1,\dots,m_2 \}$,

$D_1 := \{ (\underline{x},\underline{y},\underline{z}) \in D \mid |x_i| \le |a| , i = 1,\dots,n \}$
$D_2 := \{ (\underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}) \in D \mid |y_j| \le |b| , j = 1,\dots,m_1 ,$
$|z_r| \le |d_0| , r = 1,\dots,m_2 \} .$

Es sind D, D_1, D_2 affinoid, $D = D_1 \cup D_2$ und es gilt:

(b.6.1) $F^{-1}(D_\nu) = U_\nu''$, $\nu = 1,2$;

(b.6.2) $F_{|U_\nu''} : U_\nu'' \to D_\nu$ ist eine abgeschlossene Einbettung affinoider Räume , $\nu = 1,2$.

Damit ist $F : U_1'' \cup U_2'' \to D$ eine abgeschlossene Einbettung holomorpher Räume.

Wir beweisen (b.6.1) für $\nu = 1$: Die Inklusion $F(U_1'') \subset D_1$ ist klar. Sei $x \in U_2'' - U_1''$; nach (b.5.3) ist dann $|F_i(x)| > |a|$ für ein $i \in \{1,\dots,n\}$, also $F^{-1}(D_1) \subset U_1''$.

Wir beweisen (b.6.1) für $\nu = 2$: Für die Inklusion $F(U_2'') \subset D_2$ bleibt zu zeigen, $|G_j(x)| \le |b|$, $j = 1,\dots,m_1$, $x \in U_2''$. Falls für $i = 1,\dots,n$ $|F_i(x)| \le |a|$, so ist nach (b.5.3) $x \in U_{12}' = U_1(\varepsilon)$ und nach (b.2.1) $|G_j(x)| \le |b|$, $j = 1,\dots,m_1$; anderenfalls gibt es ein $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $|F_i(x)| > |a|$ und es folgt $|(b^{-1}G_j)(x)| \le |(a^{-1}F_i)(x)|^{-s} < 1$, $j = 1,\dots,m_1$.

Nun zu der Inklusion $F^{-1}(D_2) \subset U_2''$: Sei $x \in U_1''$ und $F(x) \in D_2$. Wegen $|G_j(x)| \leq |b|$, $j = 1,\ldots,m_1$ und (b.2.1) ist dann $x \in U_1(\varepsilon) = U_{12}'$, daher $x \in U_2''$.

Wir beweisen (b.6.2).
Für $\nu = 1$ folgt die Behauptung daraus, daß nach Konstruktion die durch F_i, $i = 1,\ldots,n$, G_j, $j = 1,\ldots,m_1$ definierte Abbildung $U_1' \to \{(\underline{x},\underline{y}) \in E^n_{|a|} \times E^{m_1} | \; |x_i^s y_j| \leq |a^s b|,\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m_1\}$ eine abgeschlossene Einbettung affinoider Räume ist.
$\nu = 2$: Nach (b.5.4) ist die durch F_i, $i = 1,\ldots,n$, H_r, $r = 1,\ldots,m_2$ definierte Abbildung $U_2'(|d_o|) \to E^n(\underline{x}) \times E^{m_2}_{|d_o|}(\underline{z})$ eine abgeschlossene Einbettung affinoider Räume. Nach Konstruktion von U_2'' folgt mit (b.6.1) die Behauptung.

Mit den F_i, $i = 1,\ldots,n$, G_j, $j = 1,\ldots,m_1$, H_r, $r = 1,\ldots,m_2$ definiert man nun G_j für $j = m_1 + 1,\ldots,m := (n+1)(m_1 + m_2)$:

für $r = 1,\ldots,m_2$ sei
$G_{m_1 + r} := d_r^{-1} H_r$;
für $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m_1$ sei
$G_{m_1 + m_2 + (i-1)m_1 + j} := (a^{-1}F_i)^s (b^{-1}G_j)$;
für $i = 1,\ldots,n$, $r = 1,\ldots,m_2$ sei
$G_{m_1 + m_2 + n m_1 + (i-1)m_2 + r} := (a^{-1}F_i)^t (d_o^{-1}H_r)$.

Dann ist $\{F_i,\ i = 1,\ldots,n\ ,\ G_j,\ j = 1,\ldots,m\}$ ein affinoides Erzeugendensystem der Strukturalgebra von $U_1'' \cup U_2''$, das nach (b.1.1), Definition der G_j, (b.6.1) für $\nu = 1$, (b.1.2) und (b.2.1) die Bedingungen (3.2.1) bis (3.2.5) des Satzes erfüllt.

Wir beweisen (3.2.6) : Sei $r := \max_{j=1,\ldots,m} |G_j|_{U_1''}|$.
Nach (b.4.4) ist $|H_l|_{W_o}| < |H_l|_{U_1''}|$, daher für $l = 1,\ldots,m_2$
$|G_{m_1+l}|_{W_o}| < |G_{m_1+l}|_{U_1''}| \leq r$.
Für $j = 1,\ldots,m_1$ ist $|G_j|_{W_o}| \leq |b'| < r' \leq \max_{\mu=1,\ldots,m_1} |g_\mu^{(1)}|_{U_1''}|$
$\leq \max_{\mu=1,\ldots,m_1} |G_\mu|_{U_1''}| \leq r$, wobei sich die erste und die vorletzte Ungleichung in der Kette jeweils aus (3.2.5) ergibt.

Für $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m_1$ ist nach Wahl von s

$$|(a^{-1}F_i)^s(b^{-1}G_j)|_{W_o}| \leq |a^{-1}a'|^s|b^{-1}b'| < |b'| < r' .$$

Schließlich ist nach Wahl von t für $i = 1,\ldots,n$, $l=1,\ldots,m_2$

$$|(a^{-1}F_i)^t(d_o^{-1}H_l)|_{W_o}| \leq |a^{-1}a'|^t|d_o^{-1}d_l|\,|d_l^{-1}H_l|_{W_o}|$$
$$< |d_l^{-1}H_l|_{W_o}| = |G_{m_1+l}|_{W_o}| < r .$$

Mit Satz 3.2. und dem lokalen Ergebnis sind wir in der Lage, die Globalisierung durchzuführen. Wir formulieren das Gesamtergebnis :

Satz 3.4. Es seien X ein regulärer holomorpher Raum, Y ein abgeschlossener Unterraum von X, Y Steinsch. Dann gibt es einen offenen Unterraum von X, der Y enthält und Steinsch ist.

Beweis : O.E. sei X endlich - dimensional. Nach [12], Theorem 4.21. gibt es ein $n \in \mathbb{N}^*$ und eine abgeschlossene Einbettung $(f_1,\ldots,f_n) : Y \to k^n$.

Sei $(c_\nu)_{(\nu\geq 1)} \subset k$ eine Folge mit
$0 < |c_1| < |c_2| < \ldots < |c_\nu| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \infty$

Dann ist für $\nu \geq 1$ $V_\nu := \{x \in Y \mid |f_i(x)| \leq |c_\nu|, i=1,\ldots,n\}$ ein offener affinoider Unterraum von Y mit Strukturalgebra $A_\nu = k\ll c_\nu^{-1}f_1,\ldots,c_\nu^{-1}f_n\gg$ und $(V_\nu)_{(\nu\geq 1)}$ bildet eine Steinsche Ausschöpfung von Y.

Nach Satz 2.8. gibt es für $\nu \geq 1$ offene affinoide Unterräume $U_\nu = \mathrm{Sp}\, B_\nu$ von X mit $U_\nu \cap Y = V_\nu$.

$b_\nu \subset B_\nu$ sei das Ideal $J(U_\nu)$, $\nu \geq 1$, wenn J die Idealgarbe zu Y ist.
Nach [10], Hilfssatz 1.5. und Folgerung 1.9. kann man o.E. annehmen, $B_\nu = k\ll c_\nu^{-1}f_1^{(\nu)},\ldots,c_\nu^{-1}f_n^{(\nu)},g_1^{(\nu)},\ldots,g_{m_\nu}^{(\nu)}\gg$ wo $f_i^{(\nu)}$ Urbilder der $f_i|V_\nu \in A_\nu$, $i = 1,\ldots,n$, und $g_j^{(\nu)}$, $j = 1,\ldots,m_\nu$, Erzeugende des Ideals b_ν sind.

Wir konstruieren im folgenden induktiv offene affinoide Unterräume W_ν, $\nu \geq 0$, von X mit $W_\nu \cap Y = V_\nu$, $W_{\nu-1} \subset W_\nu$ für $\nu \geq 1$, und affinoide Erzeugendensysteme $\{z_i^{(\nu)}, i=1,\ldots,n, w_j^{(\nu)}, j=1,\ldots,l_\nu\}$ der Strukturalgebren $A(W_\nu)$, so daß $(W_\nu, \{z_i^{(\nu)}, i=1,\ldots,n, w_j^{(\nu)}, j=1,\ldots,l_\nu\})$ eine Steinsche Ausschöpfung von $W = \overset{\infty}{\underset{\nu=0}{\cup}} W_\nu$ ist.

Wir formulieren das Verfahren als Behauptung.

Sei $c_0 \in k^*$, $|c_0| < |c_1|$; für $\nu \geq 0$ sei $a_\nu := c_{\nu+1}^{-1} c_\nu$.

Für $\nu \geq 0$ existieren Tripel

$(U^{(\nu)}, \{F_i^{(\nu)}, i=1,\ldots,n, G_j^{(\nu)}, j=1,\ldots,l_{\nu-1}\}, b_{\nu-1})$,

bestehend aus einem offenen affinoiden Unterraum $U^{(\nu)}$ von X, einem affinoiden Erzeugendensystem $\{F_i^{(\nu)}, i=1,\ldots,n, G_j^{(\nu)}, j=1,\ldots,l_{\nu-1}\}$ der Strukturalgebra $A(U^{(\nu)})$ und einem Element $b_{\nu-1} \in k^*$, $|b_{\nu-1}| < 1$, die mit den ihnen zugeordneten

$U_0^{(\nu)} := \{ x \in U^{(\nu)} \mid |F_i^{(\nu)}(x)| \leq |a_{\nu-1}|, i=1,\ldots,n \}$;

$r_{\nu-1} := \max_{j=1,\ldots,l_{\nu-1}} |G_j^{(\nu)}|_{U_0^{(\nu)}}|$;

$W_{\nu-1} := \{ x \in U^{(\nu)} \mid |F_i^{(\nu)}(x)| \leq |a_{\nu-1}|, i=1,\ldots,n,$
$|G_j^{(\nu)}(x)| \leq |b_{\nu-1}|, j=1,\ldots,l_{\nu-1} \}$;

$z_i^{(\nu-1)} := a_{\nu-1}^{-1} F_i^{(\nu)}$, $i=1,\ldots,n$,

$w_j^{(\nu-1)} := b_{\nu-1}^{-1} G_j^{(\nu)}$, $j=1,\ldots,l_{\nu-1}$, die Bedingungen

(i) $U^{(\nu)} \cap V = V_\nu$;

(ii) $F_i^{(\nu)}|_{V_\nu} = c_\nu^{-1} f_i|_{V_\nu}$, $i=1,\ldots,n$;

(iii) $J(U^{(\nu)}) = (G_1^{(\nu)}, \ldots, G_{l_{\nu-1}}^{(\nu)})$;

(iv) $|b_{\nu-1}| < r_{\nu-1}$;

und für $\nu \geq 2$ zusätzlich die Bedingungen

(v) $U_0^{(\nu-1)} \subset U^{(\nu)}$;

(vi) $l_{\nu-2} \leq l_{\nu-1}$, $\max_{j=l_{\nu-2}+1,\ldots,l_{\nu-1}} |G_j^{(\nu)}|_{W_{\nu-2}}| < |b_{\nu-1}|$,
$r_{\nu-1} \leq r_{\nu-2}$;

(vii) mit $d_{\nu-2} \in k^*$, $\max_{j=l_{\nu-2}+1,\ldots,l_{\nu-1}} |G_j^{(\nu)}|_{W_{\nu-2}} \leq |d_{\nu-2}| < |b_{\nu-1}|$

ist $W_{\nu-2} = \{x \in U^{(\nu)} \mid |F_i^{(\nu)}(x)| \leq |a_{\nu-2}a_{\nu-1}|,$

$i = 1,\ldots,n,\ |G_j^{(\nu)}(x)| \leq |b_{\nu-2}|,\ j = 1,\ldots,l_{\nu-2},$

$|G_j^{(\nu)}(x)| \leq |d_{\nu-2}|,\ j = l_{\nu-2}+1,\ldots,l_{\nu-1}\}$

erfüllen.

Wir bemerken zunächst, daß die Folge

$(W_\nu, \{z_i^{(\nu)}, i = 1,\ldots,n, w_j^{(\nu)}, j = 1,\ldots,l_\nu\})_{(\nu \geq 0)}$ dann in der Tat eine Steinsche Ausschöpfung von $W = \bigcup_{\nu \geq 0} W_\nu$ bildet, denn nach (vii) gilt für $\nu \geq 1$

$W_{\nu-1} = \{x \in W_\nu \mid |z_i^{(\nu)}(x)| \leq |a_{\nu-1}|,\ i = 1,\ldots,n,$

$|w_j^{(\nu)}(x)| \leq |b_\nu^{-1}b_{\nu-1}|,\ j = 1,\ldots,l_{\nu-1},$

$|w_j^{(\nu)}(x)| \leq |b_\nu^{-1}d_{\nu-1}|,\ j = l_{\nu-1}+1,\ldots,l_\nu\}.$

Beweis der Behauptung:

$\nu = 1$: Wir setzen

$U^{(1)} := U_1$,

$F_i^{(1)} := c_1^{-1}f_i^{(1)}$, $i = 1,\ldots,n$,

$G_j^{(1)} := g_j^{(1)}$, $j = 1,\ldots,l_0$, $l_0 := m_1$,

und wählen $b_0 \in k^*$, so daß die Bedingung (iv) erfüllt ist.

$\nu \mapsto \nu+1$: Wir wenden Satz 3.2. und Folgerung 3.3. an auf

$U \triangleq U^{(\nu)} \cup U_{\nu+1}$;

$V \triangleq V_{\nu+1}$ und $A \triangleq A_{\nu+1}$ mit dem affinoiden Erzeugendensystem $\{c_{\nu+1}^{-1}f_1, \ldots, c_{\nu+1}^{-1}f_n\}$;

$a \triangleq a_\nu$;

$B_1 \triangleq A(U^{(\nu)}) = k\langle\langle a_\nu^{-1}(a_\nu F_1^{(\nu)}), \ldots, a_\nu^{-1}(a_\nu F_n^{(\nu)}), G_1^{(\nu)}, \ldots, G_{l_{\nu-1}}^{(\nu)}\rangle\rangle$;

$B_2 \triangleq B_{\nu-1} = k\langle\langle c_{\nu+1}^{-1}f_1^{(\nu+1)}, \ldots, c_{\nu+1}^{-1}f_n^{(\nu+1)}, g_1^{(\nu+1)}, \ldots, g_{m_{\nu+1}}^{(\nu+1)}\rangle\rangle$;

$a' \triangleq a_\nu a_{\nu-1} = c_{\nu+1}^{-1}c_{\nu-1}$;

$W \triangleq U_0^{(\nu)}$;

$r' \triangleq r_{\nu-1}$, $b' \triangleq b_{\nu-1}$;

$W_0 \triangleq W_{\nu-1}$.

Wir erhalten einen offenen affinoiden Unterraum $U^{(\nu+1)}$ von $U^{(\nu)} \cup U_{\nu+1}$ mit $U^{(\nu+1)} \cap Y = V_{\nu+1}$, d.h. (i) für $\nu+1$, und $U_o^{(\nu)} \subset U^{(\nu+1)}$, d.h. (v) für $\nu+1$, und ein affinoides Erzeugendensystem $\{F_i^{(\nu+1)}, i=1,\ldots,n, G_j^{(\nu+1)}, j=1,\ldots,l_\nu\}$ $l_\nu \geq l_{\nu-1}$, für die Strukturalgebra $A(U^{(\nu+1)})$, wobei nach (3.2.1), (3.2.2) auch (ii), (iii) für $\nu+1$ erfüllt sind.

Nun zur Wahl von b_ν :
Nach (3.3.3) ist $r_{\nu-1} \leq r_\nu$ und $\max_{j=l_{\nu-1}+1,\ldots,l_\nu} |G_j^{(\nu+1)}|_{W_{\nu-1}}| < r_\nu$.
Dann sei $b_\nu \in k^*$ mit
$\max\{\frac{1}{2}(r_{\nu-1} + |b_{\nu-1}|), \max_{j=l_{\nu-1}+1,\ldots,l_\nu} |G_j^{(\nu+1)}|_{W_{\nu-1}}| < |b_\nu| < r_\nu$;
insbesondere sind dann (iv) und (vi) und nach (3.3.4) auch (vii) für $\nu+1$ erfüllt.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Artin,M.: Grothendieck topologies. Notes on a seminar by M. Artin. Harvard University 1962.

[2] Berger,R., Kiehl,R., Kunz,E., Nastold,H.-J.: Differentialrechnung in der analytischen Geometrie. Springer, Lecture Notes in Mathematics 38 (1967).

[3] Bosch,S.: Orthonormalbasen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Manuscripta math. 1,35-57 (1969).

[4] Fieseler,K.-H.: Zariski's Main Theorem in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Schriftenreihe des Math. Instituts der Universität Münster, 2. Serie 18 (1979).

[5] Gerritzen,L.: Die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf reduzierten affinoiden Algebren. J. reine u. angew. Math. 231, 114-120 (1968).

[6] Gerritzen,L., Grauert,H.: Die Azyklizität der affinoiden Überdeckungen. Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira. Princeton University Press 29, 159-184 (1969).

[7] Grauert,H., Remmert,R.: Nichtarchimedische Funktionentheorie. Weierstraß-Festband, 393-476. Opladen: Westdeutscher Verlag 1966.

[8] Grauert,H., Remmert,R.: Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Invent. math. 2, 87-133 (1966).

[9] Grothendieck,A.: Eléments de Géometrie algébrique. Publ. math. de l'IHES 20 (1964), 24 (1965).

[10] Kiehl,R.: Die De Rham Kohomologie algebraischer Mannigfaltigkeiten über einem bewerteten Körper. Publ. math. de l'IHES 33, 5-20 (1967).

[11] Kiehl,R.: Theorem A und Theorem B in der nicharchimedischen Funktionentheorie. Invent. math. 2, 256-273 (1967).

[12] Lütkebohmert,W.: Steinsche Räume in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Schriftenreihe des Math. Instituts der Universität Münster, 2. Serie 6 (1973).

[13] Siu,Y.-T.: Every Stein Subvariety Admits a Stein Neighborhood. Invent. math. 38, 89-100 (1976).

[14] Tate,J.: Rigid Analytic Spaces. Invent. math. 12, 257-287 (1971).

Lebenslauf

Name:	Antonia Hanning, geb. Janzen
Geburtsdatum:	23.06.1952
Geburtsort:	Leninabad, Tadschikische SSR, UdSSR
Eltern:	Jakob Janzen, Arbeiter Helene Janzen, geb. Letkemann, Hausfrau
Sept. 1958:	Einschulung in Duschanbe, UdSSR
Nov. 1966:	Ausreise mit den Eltern in die Bundesrepublik Deutschland
Dez. 1966 - März 1967:	Besuch einer Förderschule für Spätaussiedler in Espelkamp
Apr. 1967:	Aufnahme an das Christian - Dietrich - Grabbe Gymnasium in Detmold
Juni 1972:	dort am mathematisch - naturwissenschaftlichen Aufbauzweig Abitur
Okt. 1972 - Sept. 1975 :	Studium der Mathematik mit Nebenfach Pädagogik an der Universität Bielefeld
03.09.1975:	Eheschließung mit Rainer Hanning, Student
Okt.1975:	Fortsetzung des Studiums an der Ruhr - Universität Bochum
Sept. 1978:	Diplomprüfung
Okt. 1978 - März 1979:	Wissenschaftliche Hilfskraft an der Abteilung für Mathematik der Ruhr - Universität Bochum
Seit Apr. 1979:	dort Wissenschaftliche Assistentin (m.d.V.b.)

Bochum, den 23.05.1981